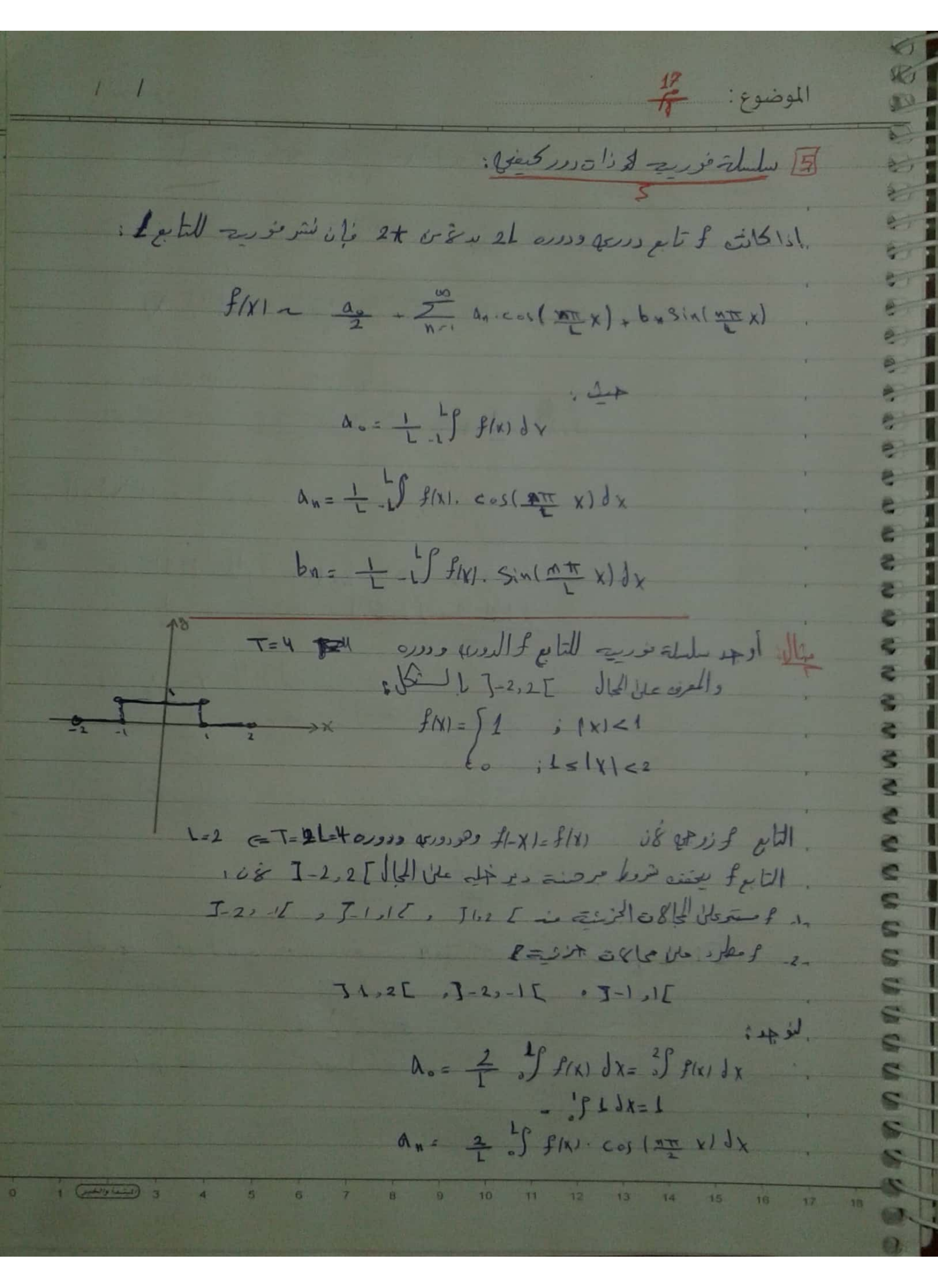


5 سلسلة فورييه لتوابع ذات دور كيفي:

إذا كانت f تابع دوري ودوره $2L$ بدلاً من 2π فإن نشر فورييه للتابع f:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

حيث:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

مثال: أوجد سلسلة فورييه للتابع f الدوري ودوره $T=4$ والمعرف على المجال $]-2,2[$ بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; |x|<1 \\ 0 & ; 1\leq|x|<2 \end{cases}$$

التابع f زوجي لأن $f(-x)=f(x)$ وهو دوري ودوره $T=2L=4 \Leftarrow L=2$

التابع f يحقق شروط ديريخليه على المجال $]-2,2[$ لأن:

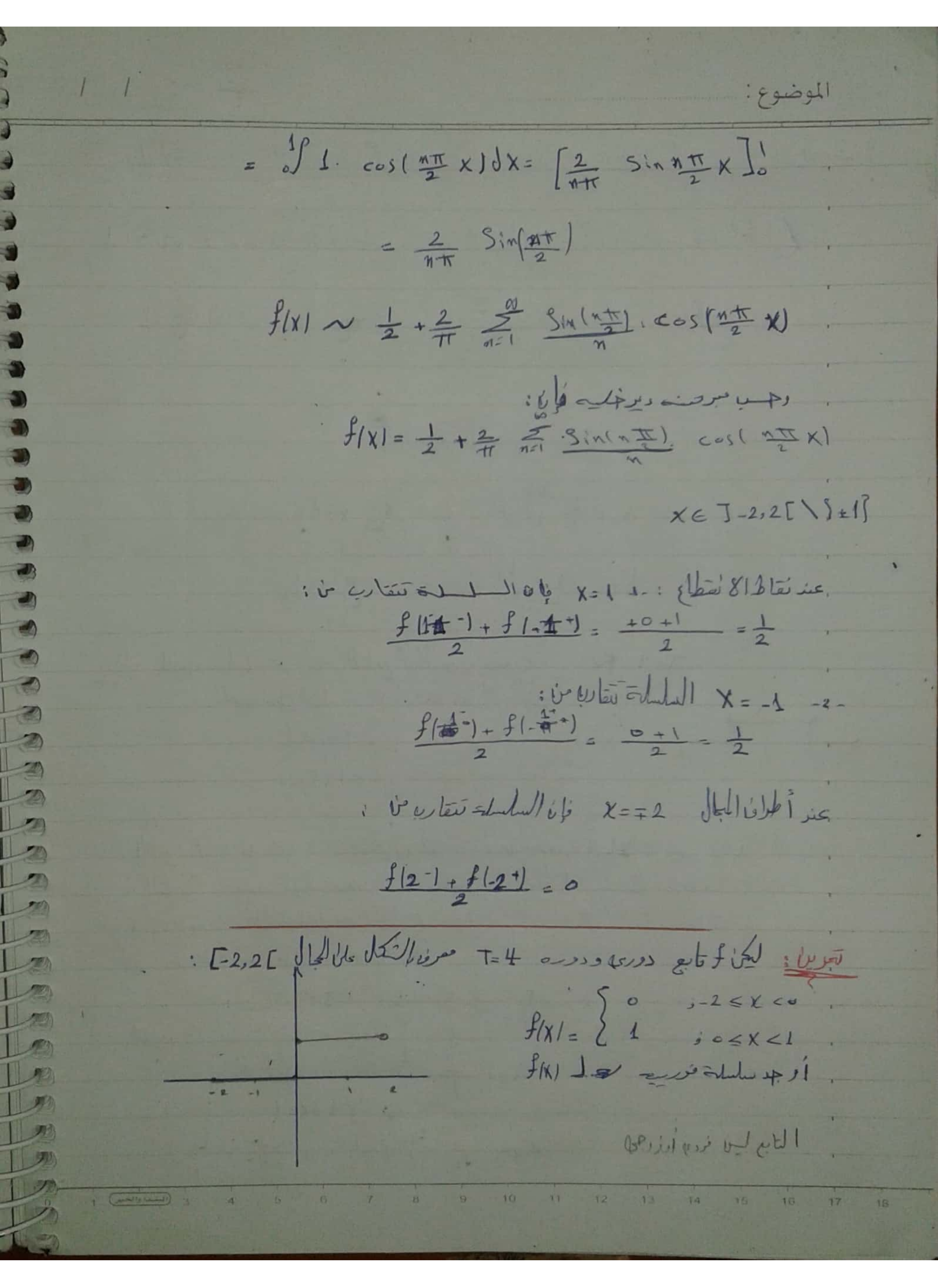
1. f مستمر على المجالات الجزئية من $]1,2[$ ، $]-1,1[$ ، $]-2,-1[$
2. f مطرد على مجالات جزئية $]-1,1[$ ، $]-2,-1[$ ، $]1,2[$

لنوجد:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx = 1$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$



$$= \int_0^1 1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

وحسب مبرهنة ديرخليه فإن:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$x \in \left]-2,2\right[\setminus \{\pm 1\}$$

عند نقاط الانقطاع: -1- $x=1$ فإن السلسلة تتقارب من:

$$\frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{+0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

-2- $x=-1$ السلسلة تتقارب من:

$$\frac{f(-1^-)+f(-1^+)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

عند أطراف المجال $x=\mp 2$ فإن السلسلة تتقارب من:

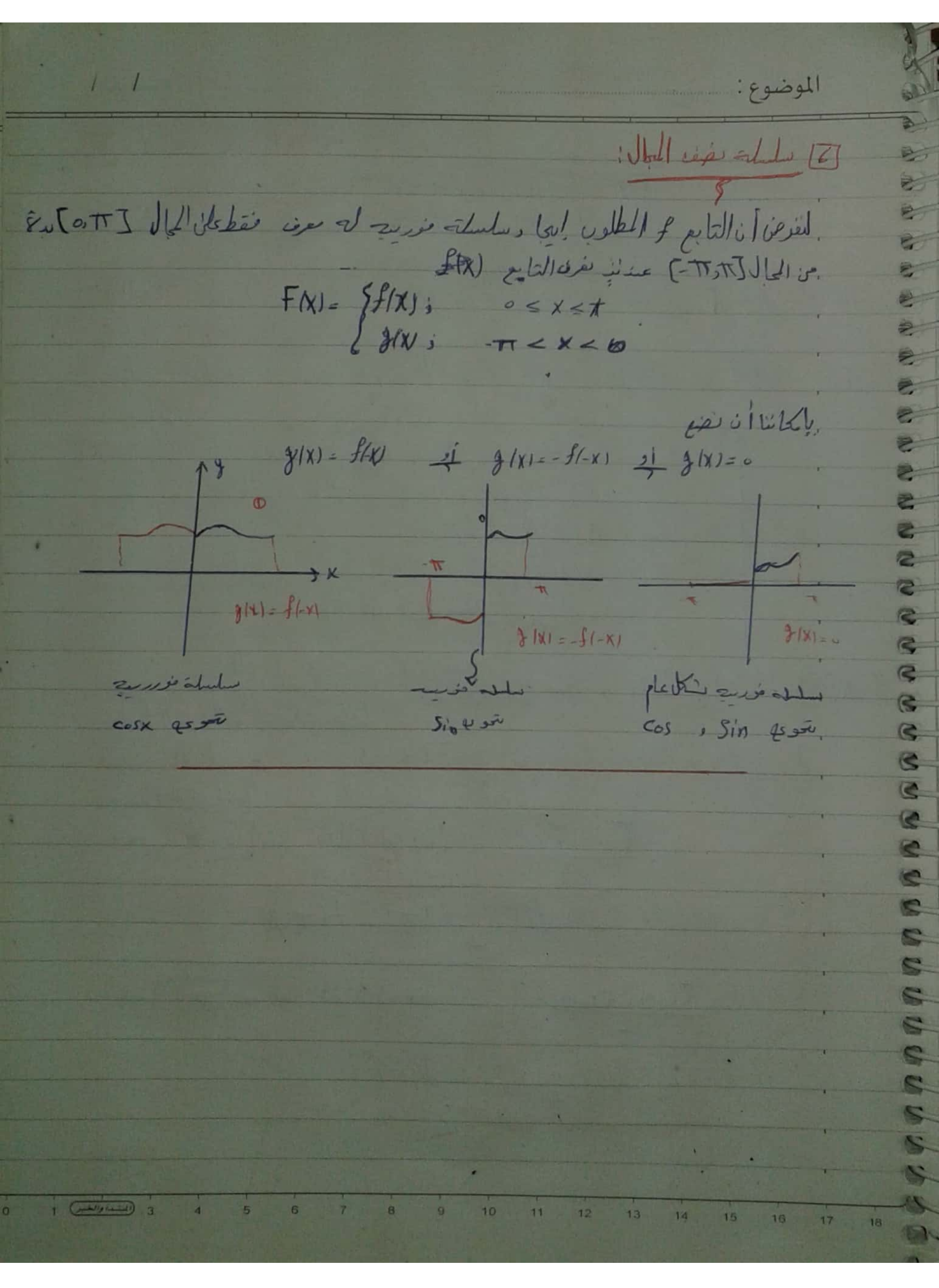
$$\frac{f(2^-)+f(-2^+)}{2} = 0$$

تمرين: ليكن f تابع دوري ودوره $T=4$ معرف بالشكل على المجال $[-2,2[$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -2 \le x < 0 \\ 1 & ; 0 \le x < 1 \end{cases}$$

أوجد سلسلة فورييه لـ $f(x)$

التابع ليس فردي أو زوجي



الموضوع : .... / /

ح سلسلة نصف المجال:

لنفرض أن التابع f المطلوب إيجاد سلسلة فورييه له معرف فقط على المجال $[0,\pi]$ بدلاً من المجال $[-\pi,\pi]$ عندئذٍ نعرف التابع $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) ; & 0 \le x \le \pi \\ g(x) ; & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

بإمكاننا أن نضع

$g(x) = f(x)$ أو $g(x) = -f(-x)$ أو $g(x) = 0$

سلسلة فورييه تحوي cosx

سلسلة فورييه تحوي sin

سلسلة فورييه بشكل عام تحوي cos , sin